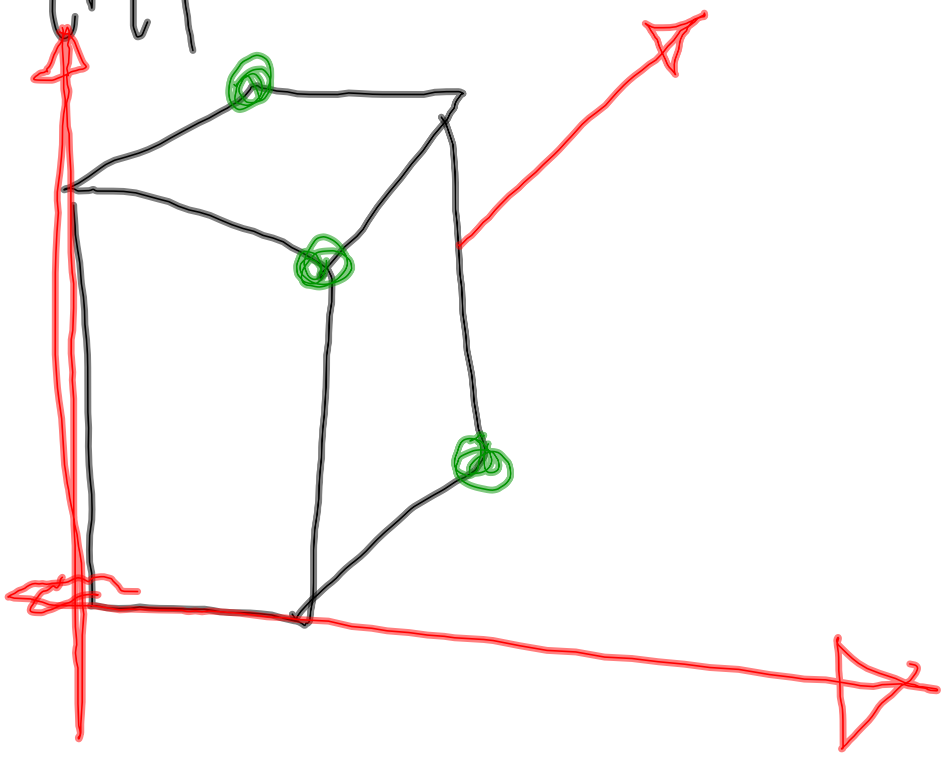
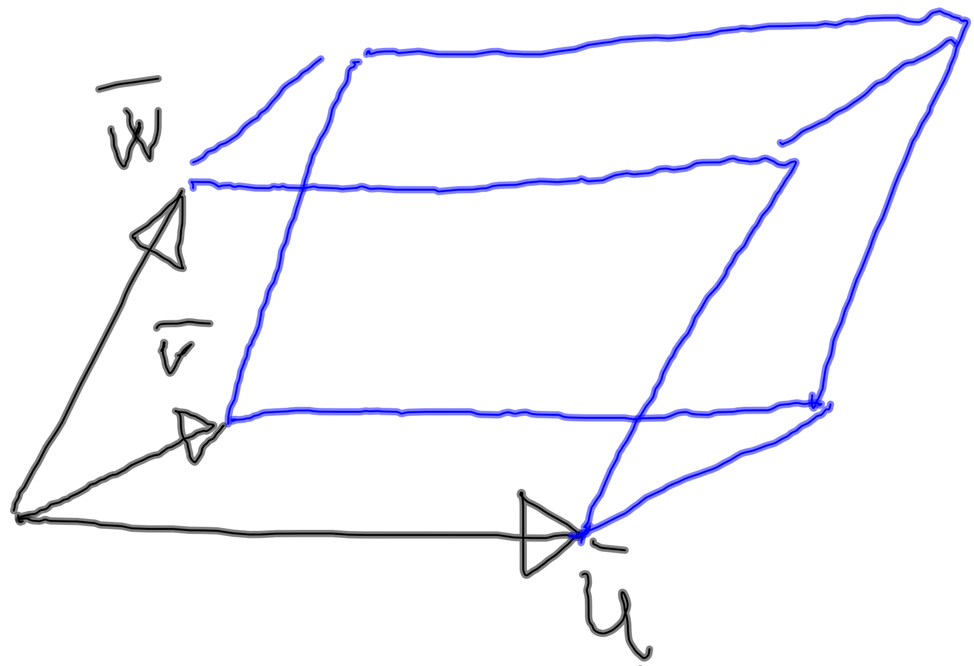
Vi kommer tillbaka till



nov 5-09:59

Trippelprodukt



Volymen är

$$|\bar{u} \times \bar{v} \cdot \bar{w}|$$

nov 5-09:59

Tecknet på

$\bar{u} \times \bar{v} \cdot \bar{w}$

är

$+$ om $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ är höger-orienterat

$-$ annars

nov 5-09:59

Om tecknet varken är + eller −

är $\bar{u} \times \bar{v} \cdot \bar{w} = 0$

och $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ ligger i plan.

nov 5-09:59

Vi kan räkna ut trippelprodukten i koordinaterna.

$\bar{u} = (x_1, y_1, z_1)$

$\bar{v} = (x_2, y_2, z_2)$

$\bar{w} = (x_3, y_3, z_3)$

nov 5-09:59

$$\bar{u} \times \bar{v} \cdot \bar{w} = x_1 y_2 z_3 - x_1 z_2 y_3 + y_1 z_2 x_3 - y_1 x_2 z_3 + z_1 x_2 y_3 - z_1 y_2 x_3$$

nov 5-09:59

Tecknen

+	−
xyz	xzy
yzx	yxz
zxy	zyx

nov 5-09:59

$$\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{matrix} \qquad +$$

$$\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{matrix} \qquad =$$

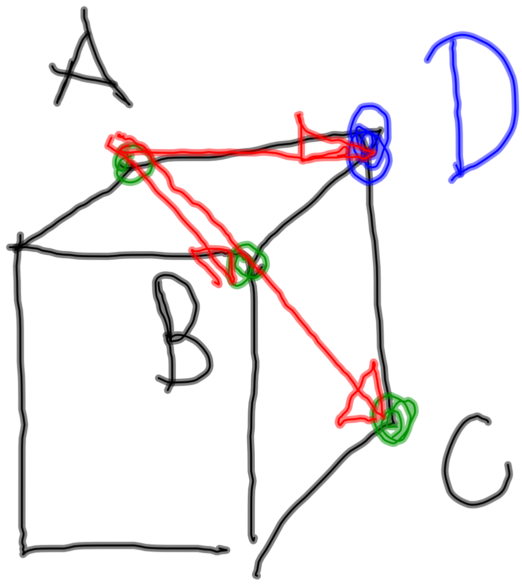
nov 5-10:00

Exempel

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} =$$

$$(1,-1,0) \times (1,0,-1)$$

$$= (1,1,1)$$



$$\overrightarrow{AD} = (1,0,0)$$

nov 5-10:00

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} =$$

$$(1,1,1) \cdot (1,0,0)$$

$$= 1$$

Tolka!

Volymen av tetra-edern ABCD är $\frac{1}{6}$

nov 5-10:30

Vi kan få samma tetraeder från D.

$$\vec{DA} \times \vec{DB} \cdot \vec{DC} =$$

$$(-1,0,0) \times (0,-1,0) \cdot (0,0,-1)$$

$$= (0,0,1) \cdot (0,0,-1)$$

$$= -1$$

nov 5-10:33

Tillbaka till planet genom A, B och C.

Vi har hittat

$$\bar{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1,1,1)$$

nov 5-10:38

Alltså är ekvationen för planet

$$1\cdot x + 1\cdot y + 1\cdot z = d$$

$$\overrightarrow{OP}\circ \bar{n} = \overrightarrow{OP_0}\circ \bar{n}$$

där P_0 är en punkt i planet.

nov 5-10:40

Sätt A, B eller C.

$A = (0, 1, 1)$

$1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = d = 2$

Och ekvationen är

$x + y + z = 2$

nov 5-10:42

Plan med parametrar

Vi kan välja

$P_0 = A$

$\bar{u} = \overrightarrow{AB}$

$\bar{v} = \overrightarrow{AC}$

nov 5-11:04

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + s\bar{u} + t\bar{v}$$

$$= \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$

$$= (0,1,1) + s(1,-1,0)$$

$$+ t(1,0,-1)$$

$$= (s+t, 1-s, 1-t)$$

nov 5-11:05

Testa:

$B = (1, 0, 1)$

$s = 1, t = 0 \Rightarrow$

$(s+t, 1-s, 1-t) = (1, 0, 1)$

$C = (1, 1, 0)$

$s = 0, t = 1 \Rightarrow$

$(s+t, 1-s, 1-t) = (1, 1, 0)$

nov 5-11:07

Problem;

- Inte unikt – det finns många olika parameter framst. av samma plan.

nov 5-11:10

Linjer på parameterform

riktningsvektorn

$\bar{v}$

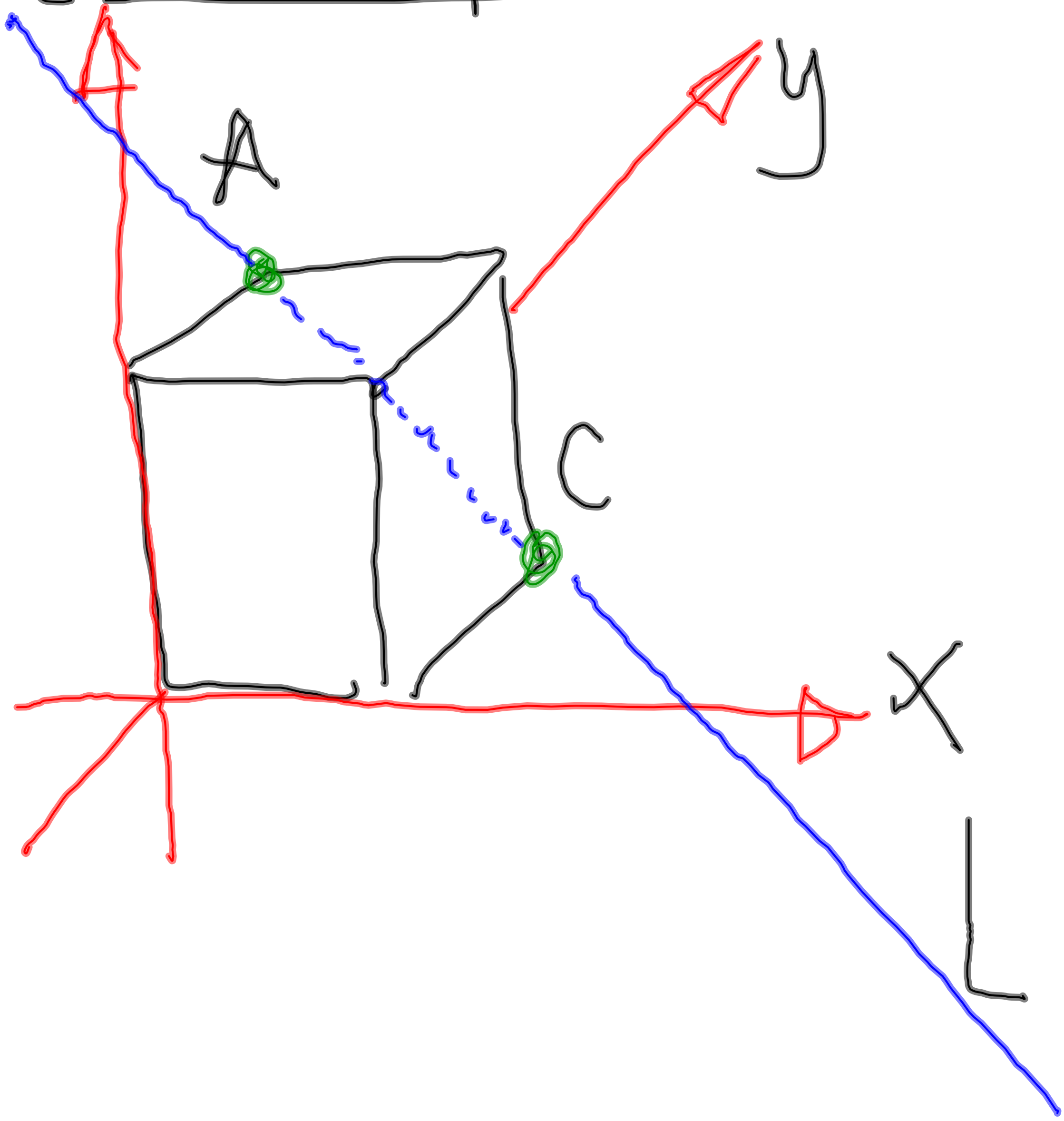
är unik upp till skalning.

nov 5-11:14

Punkten P_0
kan väljas var
somhelst på
linjen.

nov 5-11:14

Exempel



nov 5-11:15

Parameterform för linjen L

$$\overrightarrow{OA} + t\bar{v} =$$

$$= \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AC}$$

$$t = 0 \Rightarrow A$$

$$t = 1 \Rightarrow C$$

nov 5-11:16

Ekvationer för linjen (ej unika)

Börja med

$$x+y+z=2$$

Som innehåller A, B och C.

nov 5-11:19

Ett annat plan

är $y=1$

Vi får linjen som

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ y=1 \end{cases}$$

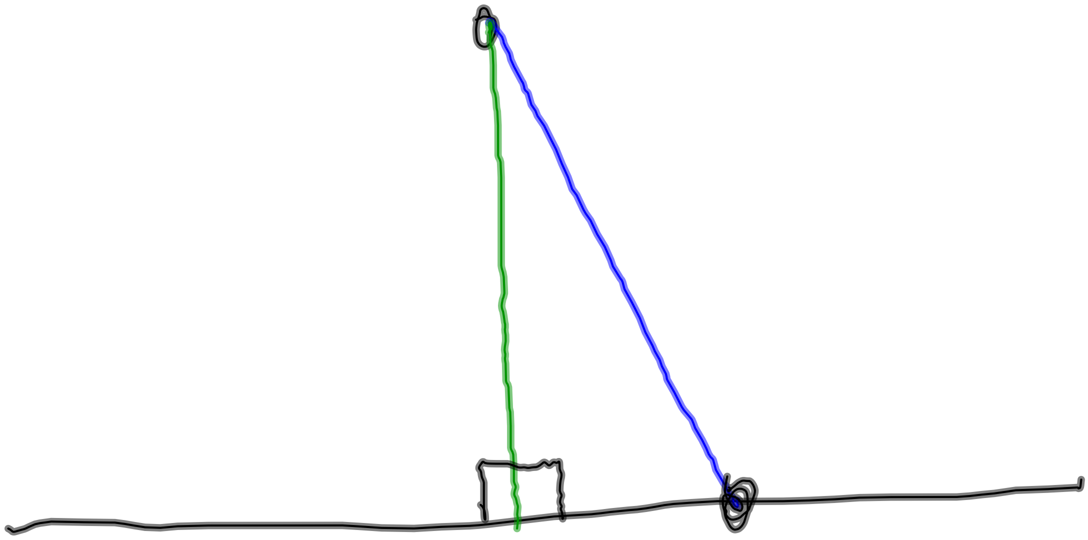
nov 5-11:22

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

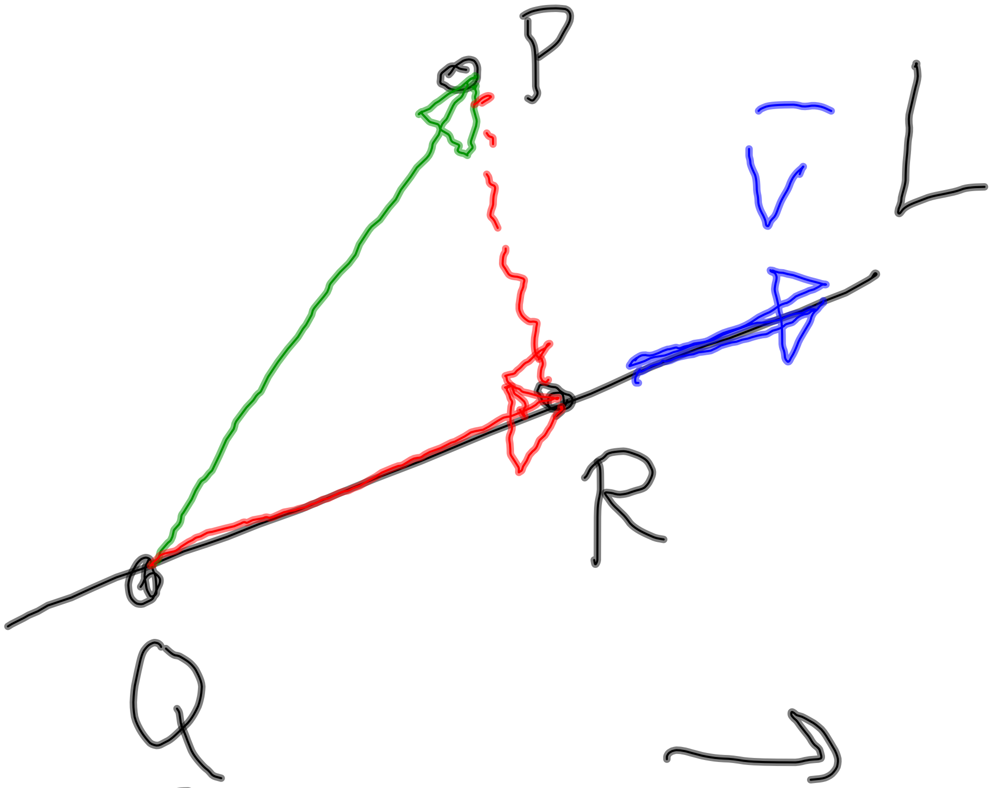
Både A och C uppfyller dessa.

nov 5-11:23

Projektion av punkt på linje



nov 5-11:25



$$\overrightarrow{QR} = \mathrm{Proj}_{\bar{v}} \overrightarrow{QP}$$

Från parameter-formen får vi

$\bar{v} = (0, 1, -2)$

$Q = (2, 1, -1)$

nov 5-11:27

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$$

$$= (0,1,1) - (2,1,-1)$$

$$= (-2,0,2)$$

$$\mathrm{Proj}_{\bar{v}} \overrightarrow{QP} = \frac{\overrightarrow{QP} \cdot \bar{v}}{\bar{v} \cdot \bar{v}} v$$

$$= \frac{(-2,0,2) \cdot (0,1,-2)}{(0,1,-2) \cdot (0,1,-2)} (0,1,-2)$$

nov 5-11:31

$$= \frac{0+0-4}{0+1+4}(0,1,-2)$$

$$= -\frac{4}{5}(0,1,-2) =$$

$$= \overrightarrow{QR}$$

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QR}$$

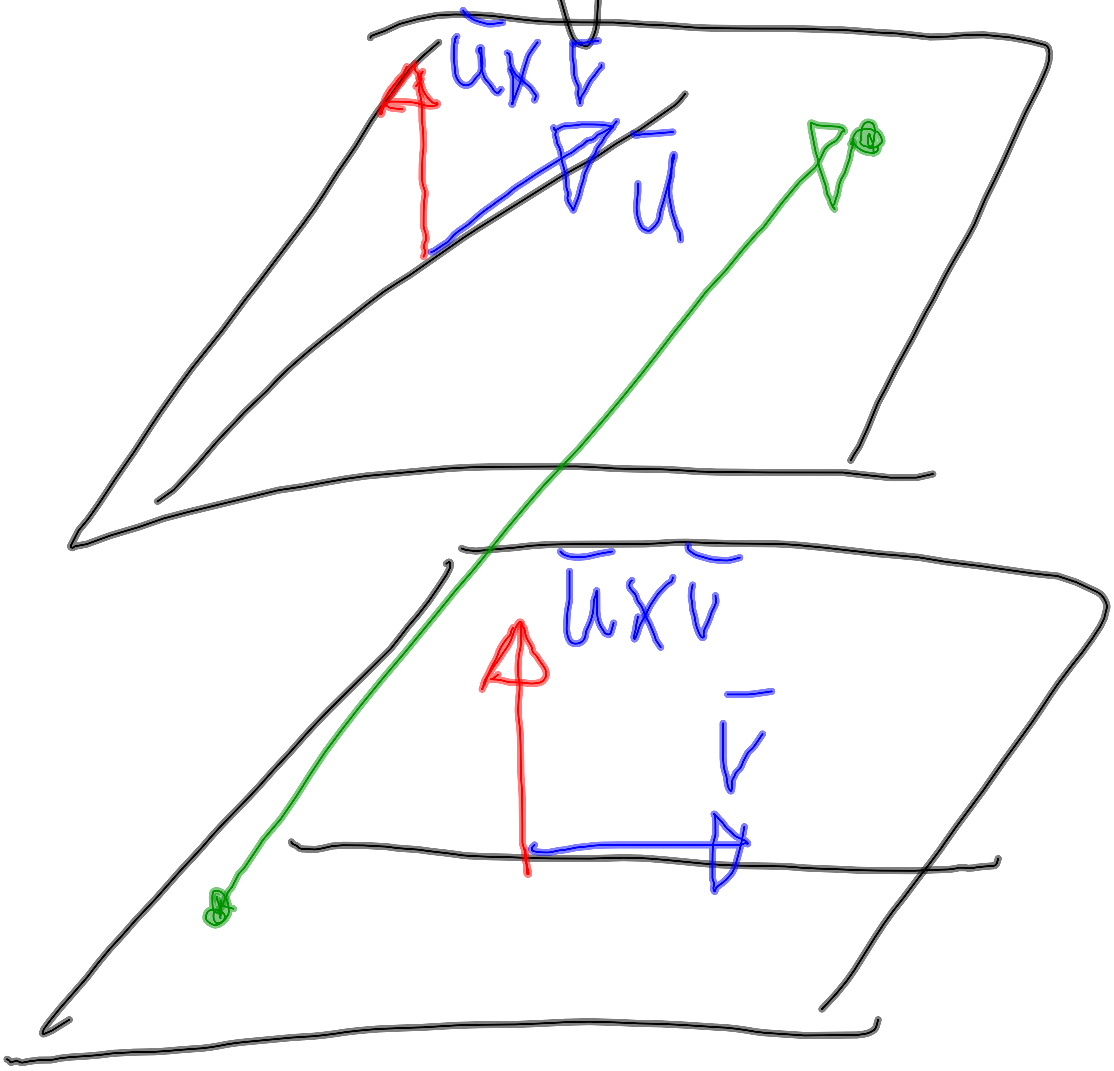
$$= (2,1,-1) - \frac{4}{5}(0,1,-2)$$

nov 5-11:34

$$= \left(2, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

nov 5-11:37

Avstånd mellan två linjer



nov 5-11:44

$$\bar{n} = \bar{u} \times \bar{v} = (a, b, c)$$

$$ax + by + cz = d$$

$$ax + by + cz = e$$

nov 5-11:45